LINEARE ALGEBRA

**Vektoren und Vektorraum**

---

# Teil 3

## Untervektorräume

Stand 1[illegible]. Juli 2011

Datei Nr. 61110

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

# Inhalt

# Untervektorräume

## 1 Einführung und Beispiele

Dieses Thema wird in einigen Bundesländern nichtmehr behandelt, weil man sich dort nur auf die geometrischen Anwendungen beschränkt.
Wenden wir uns zunächst der Definition zu:

**Eine nicht leere Teilmenge eines Vektorraums V, die selbst wieder ein eigener Vektorraum ist, heißt Untervektorraum U.**

Jetzt sollte man die **Vorschriften für einen Vektorraum** wissen (Datei 61101-Vektorraum):

1. In V gibt es eine Addition, so dass mit $\vec{a}, \vec{b} \in V \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in V$.

   Dazu gelten 4 Rechengesetze:

   (A1): $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c} = \vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

   (A2): In V gibt es den Nullvektor

   (A3): Jeder Vektor $\vec{a} \in V$ hat seinen inversen Vektor $-\vec{a}$ in V.

   (A4): $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$

2. In V gibt es die S-Multiplikation (Vielfachen-Bildung), so dass zu jedem $\vec{a} \in V$ auch jedes Vielfache $r\vec{a}$ in V liegt. Dazu gelten 4 Rechengesetze:

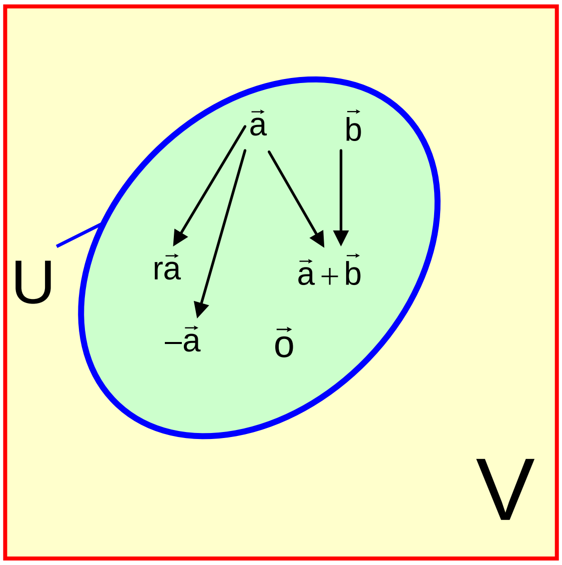
   (S1) $r\left(s\vec{a}\right) = (rs)\vec{a}$ (gemischtes Assoziativgesetz)

   (S2) $\left(r+s\right)\vec{a} = r\vec{a}+s\vec{a}$ (1. Distributivgesetz)

   (S3) $r(\vec{a}+\vec{b}) = r\vec{a}+r\vec{b}$ (2. Distributivgesetz)

   (S4) $1\vec{a} = \vec{a}$

Wenn nun die Teilmenge U eines Vektorraums V selbst wieder ein Vektorraum sein soll, dann muss man überhaupt nicht alle diese Regeln auf ihre Gültigkeit hin überprüfen. So gelten die sechs Gleichungen A1, A4 und S1 bis S4 in der ganzen Menge V, also natürlich auch in U. Es bleibt also ganz wenig zu überprüfen:




### *Untervektorraum-Kriterium*

(U1) Zu zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in U$ muss auch die Summe $\vec{a}+\vec{b}$ in **U** sein.

(U2) Mit einem Vektor $\vec{a} \in U$ müssen auch alle seine Vielfachen $r\vec{a}$ in U sein.

Denn ist nämlich auch der inverse Vektor $\left(-1\right)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$ in U, und auch der Nullvektor wegen $0\cdot\vec{a} = \vec{o}$.

## Beispiel 1

U sei die Menge aller Vielfachen eines Vektors $\vec{u}$, geschrieben $U = [\vec{u}]$.
*Man nennt U die lineare Hülle des Vektors* $\vec{u}$.

Wir überprüfen die beiden „Untervektorraum-Kriterien“:

U1: Es sei $\vec{a} \in U$, d.h. $\vec{a} = r \cdot \vec{u}$
und es sei $\vec{b} \in U$, d.h. $\vec{b} = s \cdot \vec{u}$

Dann ist $\vec{a} + \vec{b} = r\vec{u} + s\vec{u} = (r+s)\vec{u}$
wieder ein Vielfaches von $\vec{u}$ und somit ist also auch $\vec{a} + \vec{b} \in U$.

U2: Es sei $\vec{a} \in U$, d.h. $\vec{a} = r \cdot \vec{u}$, und es sei k eine beliebige reelle Zahl,
dann ist auch $k \cdot \vec{a} = k \cdot (r\vec{u}) = (kr) \cdot \vec{u}$ wieder ein Vielfaches von $\vec{u}$
und somit ist also auch $k\vec{a} \in U$.

Das genügt, um feststellen zu dürfen: Die Summe zweier Vielfachen eines Vektors ist wieder ein Vielfaches, und ein Vielfaches eines anderen Vielfachen ist wieder ein Vielfaches. Die Menge aller Vielfachen eines Vektors ist also für sich wieder ein Vektorraum, also ein Untervektorraum des übergeordneten Vektorraums V.

## Beispiel 2

U sei die Menge aller Linearkombinationen zweier Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, geschrieben $U = [\vec{u}, \vec{v}]$.

Wir überprüfen die beiden „Untervektorraum-Kriterien“:

U1: Es sei $\vec{a} \in U$, d.h. $\vec{a} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$,
und es sei $\vec{b} \in U$, d.h. $\vec{b} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$
Dann ist $\vec{a} + \vec{b} = (r\vec{u} + s\vec{v}) + (x\vec{u} + y\vec{v}) = (r+x)\vec{u} + (s+y)\vec{v}$
wieder eine Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$,
und somit ist also auch $\vec{a} + \vec{b} \in U$.

U2: Es sei $\vec{a} \in U$, d.h. $\vec{a} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$,
und es sei k eine beliebige reelle Zahl,
dann ist auch $k \cdot \vec{a} = k \cdot (r\vec{u} + s\vec{v}) = (kr) \cdot \vec{u} + (ks) \cdot \vec{v}$
wieder eine Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$,
und somit ist also auch $k\vec{a} \in U$.

Das genügt, um feststellen zu dürfen: Die Menge aller Linearkombinationen zweier Vektoren ist ein Vektorraum, also ein Untervektorraum des übergeordneten Vektorraums V.

Dies lässt sich auf drei oder mehr Vektoren ausdehnen. Die Beweise verlaufen dann analog wie im Beispiel 2.

Wir haben aus vielen Beispielaufgaben gesehen, dass speziell die homogenen linearen Gleichungen bzw. Gleichungssysteme zu solchen Untervektorräumen führen. Dies wollen wir uns nochmals ansehen:

## Beispiel 3

Beweise, dass die Lösungsmenge der homogenen linearen Gleichung

$$2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0$$

ein Untervektorraum des $R^3$ ist. Gib eine Basis und seine Dimension an.
Diese Lösungsmenge kann man so schreiben:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \right\}.$$

*Dies heißt: U bestehe aus allen Vektoren, die diese Gleichung erfüllen!*

## Lösung

(1) <u>Direkter Beweis mit dem Untervektorraum-Kriterium:</u>

Es sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{U}$, d. h. es gilt: $2a_1 + a_2 - 5a_3 = 0$ (1)

Und es sei $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in U$, d.h. es gilt: $2b_1 + b_2 - 5b_3 = 0$ (2)

Addition (1) + (2) ergibt: $2(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) - 5(a_3 + b_3) = 0$

Also ist auch $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \in U$, d.h. ein Lösungsvektor.

Multipliziert man (1) mit einer beliebigen Zahl $r \in R$, erhält man

$$2ra_1 + ra_2 - 5ra_3 = 0$$

also ist auch $r\vec{a} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix} \in U$, d.h. ein Lösungsvektor.

Folglich ist die Lösungsmenge U ein UVR des $\mathbf{R}^3$.

Bemerkung:

Der Beweis ist hiermit beendet. Wir berechnen jetzt im Anschluss noch die Lösungsmenge.

2. <u>Indirekter Beweis</u> durch Berechnung der Lösungsmenge der Gleichung
$2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0$:

Wähle $x_1 = r,\ r \in R$ und $x_3 = s,\ s \in R \Rightarrow x_2 = -2r + 5s$.

Dies ergibt den Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ -2r+5s \\ s \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

und die Lösungsmenge $U = \left\{ r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| r,s \in R \right\} = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

besteht somit aus allen Linearkombinationen der beiden Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hat man die Lösungsmenge als Lineare Hülle identifiziert, kann man auf Grund des Beweises in Beispiel 2 auch sagen:

**Als Lineare Hülle ist die Lösungsmenge dieser Gleichung ein Untervektorraum!**

Diese sind linear unabhängig, da sie keine Vielfachen voneinander sind.
Da alle weiteren Vektoren aus U Linearkombinationen aus $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind, gibt also nicht mehr als linear unabhängige Vektoren in U. Es ist also dim U = 2 und $\vec{u}$ und $\vec{v}$ können als Basisvektoren verwendet werden.

**<u>Hinweis:</u>**

Eine lineare homogene Gleichung im $R^2$ hat nur 2 Variable, also nur eine freie Wahl. Daher besteht der Untervektorraum der Lösungsmenge aus allen Vielfachen eines einzigen Basisvektors und hat daher nur die Dimension 1.

Im $R^4$ dagegen (z.B. $x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0$) kann man drei Variable frei wählen und erhält als Lösungsmenge alle Linearkombinationen aus 3 linear unabhängigen Vektoren. Dies sehen wir uns im nächsten Beispiel an: